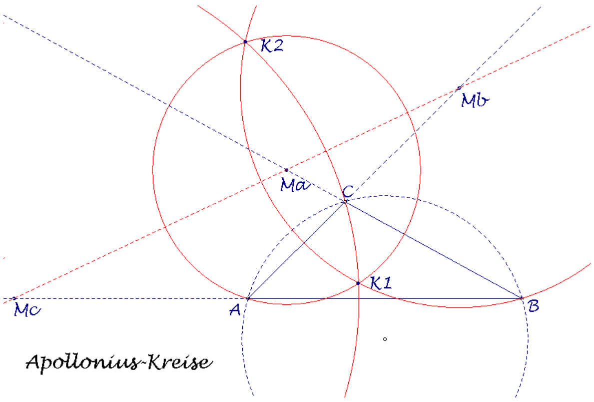
Spiegeldreiecke zu Apollonius-Büscheln

Eckart Schmidt

Spiegelt man einen Punkt des Umkreises an den drei Apollonius-Kreisen eines Dreiecks, so ergibt sich ein weiteres Dreieck im Umkreis. Diese Spiegeldreiecke sind Gegenstand der Ausarbeitung. Man erhält sie auch durch Spiegelung der Ecken des Bezugsdreiecks an einem Kreis des elliptischen Büschels der Apollonius-Kreise. Daher sind die Spiegeldreiecke eines Bezugsdreiecks die perspektiven Dreiecke im Umkreis zu Perspektivzentren auf der Lemoine-Geraden. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten.



Apollonius-Kreise

Das Bezugsdreieck ABC habe die Seitenlängen a, b, c, die paarweise verschieden sein mögen. Für die zugehörigen baryzentrischen Koordinaten werden ergänzend die Abkürzungen von Conway benutzt:

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\text{sowie } S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} = 2\Delta .$$

Die Apollonius-Kreise teilen die zugehörigen Seiten harmonisch im Verhältnis der angrenzenden Seiten und schneiden den Umkreis senkrecht. Ihre Radien sind

$$r_a = \frac{abc}{|b^2 - c^2|}, \quad r_b = \frac{abc}{|c^2 - a^2|}, \quad r_c = \frac{abc}{|a^2 - b^2|} \quad .$$

Die Mittelpunkte

$$M_a(0 : b^2 : -c^2), \quad M_b(-a^2 : 0 : c^2), \quad M_c(a^2 : -b^2 : 0)$$

sind kollinear und liegen auf der sogenannten Lemoine-Geraden (Polare des Lemoine-Punktes $L(a^2:b^2:c^2)$ bzgl. des Umkreises) mit der Gleichung

$$b^2c^2x + c^2a^2y + a^2b^2z = 0 .$$

Die drei Apollonius-Kreise haben zwei gemeinsame Punkte auf der Brocard-Achse, die sogenannten isodynamischen Punkte

$$K_{1,2}(a^2(S \pm \sqrt{3}S_A) : b^2(S \pm \sqrt{3}S_B) : c^2(S \pm \sqrt{3}S_C) ,$$

die symmetrisch zum Umkreis liegen.

Die zweiten Schnittpunkte der Apollonius-Kreise mit dem Umkreis ergeben sich zu

$A'(-a^2:2b^2:2c^2),\quad B'(2a^2:-b^2:2c^2),\quad C'(2a^2:2b^2:-c^2)$.

Spiegeldreiecke

Betrachtet man den Umkreis des Bezugsdreiecks als isogonales Bild der Ferngeraden, so lassen sich Umfangspunkte P ($\neq A, B, C$) wie folgt darstellen

$$P\left(\frac{a^2}{v-w}, \frac{b^2}{w-u}, \frac{c^2}{u-v}\right),$$

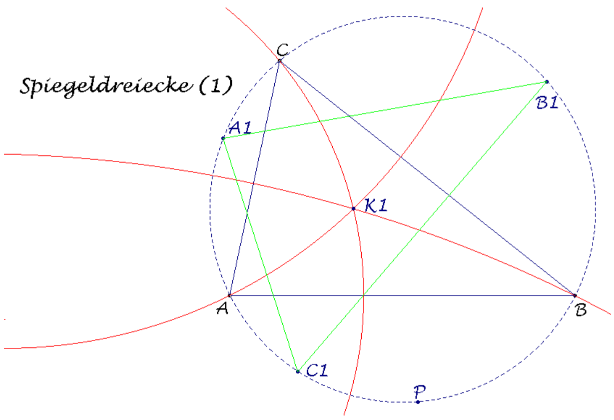
wobei u, v, w verschiedene reelle Zahlen sein können.

Spiegelt man einen Umfangspunkt P an den drei Apollonius-Kreisen, so erhält man für das Spiegeldreieck $A_1B_1C_1$ die Umkreispunkte

$$A_1\left(\frac{a^2}{v-w}, \frac{b^2}{u-v}, \frac{c^2}{w-u}\right),$$

$$B_1\left(\frac{a^2}{u-v}, \frac{b^2}{w-u}, \frac{c^2}{v-w}\right),$$

$$C_1\left(\frac{a^2}{w-u}, \frac{b^2}{v-w}, \frac{c^2}{u-v}\right)).$$



Die Spiegeldreiecke zu A, B, C sind ACB, CBA, BAC und zu A', B', C' erhält man entsprechend $A'C'B'$, $C'B'A'$, $B'A'C'$.

Es gibt eine einfache Konstruktionsmöglichkeit der Spiegeldreiecke. Dazu sei folgende Abbildungskette betrachtet: Das isogonal-konjugierte Bild (*) des Umkreises ist die Ferngerade; das isotom-konjugierte Bild (^) der Ferngeraden ist die Steiner-Um-Ellipse, deren isogonal-konjugiertes Bild (*) die Lemoine-Gerade ergibt. Verfolgt man diese Abbildungen für den Umkreispunkt P

$$P(\frac{a^2}{v-w},\frac{b^2}{w-u},\frac{c^2}{u-v}) \to P^*(v-w,w-u,u-v)$$

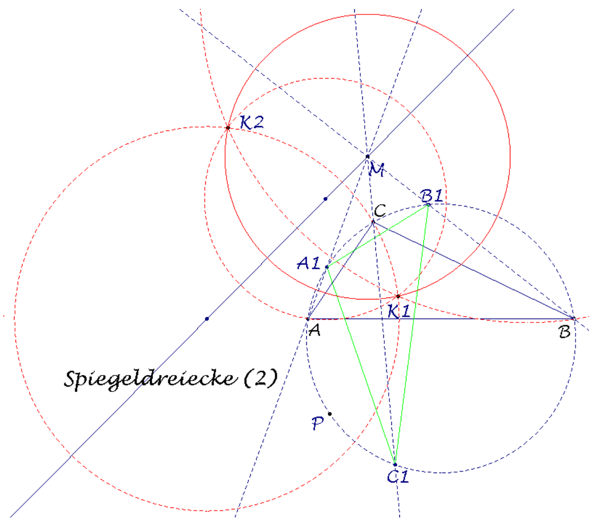
$$P^{*\wedge}(\frac{1}{v-w},\frac{1}{w-u},\frac{1}{u-v}) \to P^{*\wedge*}(a^2(v-w),b^2(w-u),c^2(u-v)),$$

so erhält man einen Punkt $M = P^{*\wedge*}$ auf der Lemoine-Geraden. Diese Abbildungskette kann auch durch eine einzige Konjugation (isoconjugation) zusammengefasst werden:

$$X(x:y:z) \xrightarrow[*\wedge*]{} X'(a^4yz:b^4zx:c^4xy).$$

Betrachtet man M als Mittelpunkt eines Kreises des elliptischen Büschels der Apollonius-Kreise, d.h. eines Kreises durch die isodynamischen Punkte K_1 und K_2, dann liefern die Spiegelungen von A, B, C an diesem Kreis das obige Spiegeldreieck. Damit sind Bezugsdreieck und Spiegeldreieck perspektiv bezüglich eines Punktes der Lemoine-Geraden.

Satz 1. Das Spiegeldreieck eines Bezugsdreiecks zu einem Umfangspunkt P ist das perspektive Dreieck im Umkreis zu dem Perspektivzentrum $M=P^{*\wedge*}$ auf der Lemoine-Geraden.



Z.B. ergeben sich diese Perspektivzentren für die Spiegeldreiecke von A', B', C' zu

$$(2a^2:-b^2:-c^2),\quad (-a^2:2b^2:-c^2),\quad (-a^2:-b^2:2c^2).$$

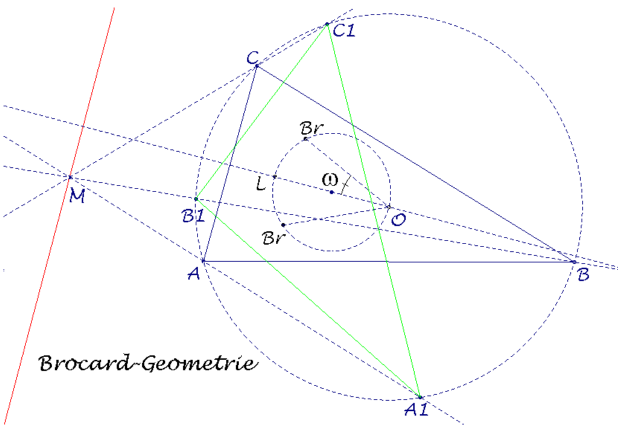
Eigenschaften der Spiegeldreiecke

Spiegelt man A, B, C an einem Kreis um einen Punkt M der Lemoine-Geraden, der durch die isodynamischen Punkte $K_{1,2}$ verläuft, so erhält man ein Spiegeldreieck $A_1B_1C_1$. Diese Kreisspiegelung überführt auch die Apollonius-Kreise von ABC in die von $A_1B_1C_1$. Damit haben Bezugsdreieck und Spiegeldreieck nicht nur den gleichen Umkreis, sondern auch eine gemeinsame Lemoine-Gerade und zugehörigen Lemoine-Punkt. Umkreismitte und Lemoine-Punkt sind diametrale Punkte des Brocard-Kreises, zu dem die isodynamischen Punkte ebenfalls symmetrisch liegen. Auch für den Brocard-Winkel ω bestätigt sich die Übereinstimmung

$$\cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta} = \frac{a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2}{4\Delta_1}.$$

Damit haben Bezugsdreieck und Spiegeldreieck die gleiche Brocard-Geometrie mit den Brocard-Punkten

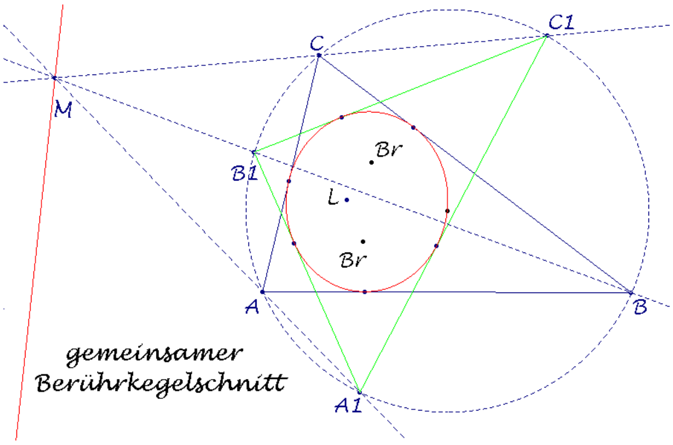
$$B_{r1}(a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2) \quad und \quad B_{r2}(a^2c^2, b^2a^2, c^2b^2).$$



Die Brocard-Punkte sind als isogonale Punkte Brennpunkte eines gemeinsamen Berührkegelschnitts mit der Gleichung

$$b^4c^4x^2 + c^4a^4y^2 + a^4b^4z^2 - 2a^2b^2c^2(a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0.$$

Der Brianchon-Punkt, d.h. der Punkt, dessen Ceva-Dreieck die Berührpunkte liefert, ist der gemeinsame Lemoine-Punkt, dessen Polare wieder die Lemoine-Gerade ist.



Satz 2. Spiegeldreiecke haben die gleiche Brocard-Geometrie wie das Bezugsdreieck. Die Brocard-Punkte sind die Brennpunkte einer gemeinsamen Berührellipse, der Lemoine-Punkt ist der zugehörige Brianchon-Punkt.

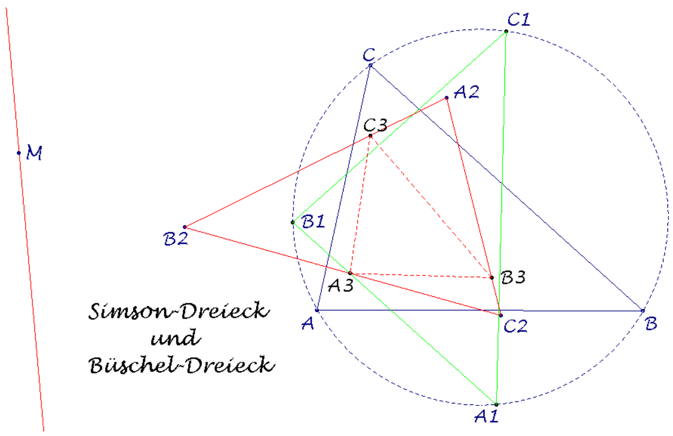
Die große Halbachse dieser gemeinsamen Berührellipse errechnet sich zu

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}},$$

d.h. die Spiegeldreiecke haben eine konstante Summe der reziproken Seitenquadrate.

Simson-Dreiecke

Es liegt nahe, die Simson-Geraden der Ecken *A, B, C* des Bezugsdreiecks bzgl. eines Spiegeldreiecks $A_1B_1C_1$ zu betrachten. Diese erzeugen ein Dreieck, das hier als Simson-Dreieck $A_2B_2C_2$ angesprochen sei. Da sich die Simson-Geraden zweier Umkreispunkte unter dem halben Mittelpunktswinkel schneiden, sind die Simson-Dreiecke dem Bezugsdreieck ähnlich.



Dabei zeigt sich, dass die Simson-Geraden zu jeder Ecke des Bezugsdreiecks ein Geradenbüschel ergeben. Die zugehörigen Büschelpunkte sind

$$A_3(a^4(b^2+c^2):b^2c^2S_C:b^2c^2S_B),$$
$$B_3(c^2a^2S_C:b^4(c^2+a^2):c^2a^2S_A),$$
$$C_3(a^2b^2S_B:a^2b^2S_A:c^4(a^2+b^2)).$$

Die Simson-Dreiecke sind also zum Bezugsdreieck ähnliche umbeschriebene Dreiecke von $A_3B_3C_3$, das hier als Büschel-Dreieck bezeichnet sei.

Zur Geometrie des Büschel-Dreiecks $A_3B_3C_3$: Die Ecken des Büschel-Dreiecks liegen auf den Höhen des Bezugsdreiecks und teilen diese – ausgehend von einer Ecke – in den Verhältnissen

$$\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)},\quad \frac{c^2a^2}{b^2(c^2+a^2)},\quad \frac{a^2b^2}{c^2(a^2+b^2)}.$$

Man erhält das Büschel-Dreieck, wenn man das Bezugsdreieck an der Brocard-Mitte

$$B_m(a^2(b^2+c^2):b^2(c^2+a^2):c^2(a^2+b^2))$$

spiegelt und in diesem Dreieck das Fußpunktdreieck des Höhenschnitts $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ des Bezugsdreiecks bildet. Damit ist das an der Brocard-Mitte gespiegelte Bezugsdreieck auch ein Simson-Dreieck.

Verallgemeinerte Apollonius-Büschel

Es gibt eine Möglichkeit, den Begriff des Apollonius-Büschels allgemeiner zu fassen [1]. Zu drei paarweise verschiedenen positiven reellen Zahlen α, β, γ werden die Kreise betrachtet, deren Punkte von den Enden der Seiten *AB, BC, CA* die Entfernungsverhältnisse $\beta{:}\alpha,\ \gamma{:}\beta,\ \alpha{:}\gamma$ haben. Diese „Apollonius-Kreise" definieren ein Kreisbüschel, das elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sein kann. Für

$$\alpha = a \quad , \quad \beta = b \quad , \quad \gamma = c$$

erhält man das klassische elliptische Apollonius-Büschel. Ist das größte der Verhältnisse

$$\frac{a}{\alpha} \quad , \quad \frac{b}{\beta} \quad , \quad \frac{c}{\gamma}$$

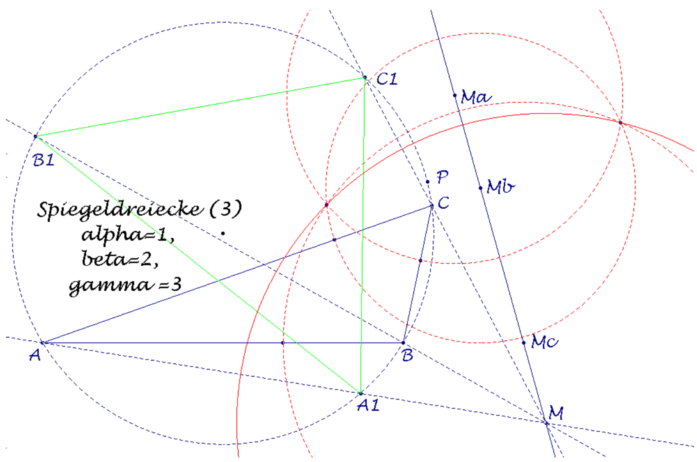
kleiner , gleich bzw. größer als die Summe der beiden anderen, so ist das „Apollonius-Büschel" elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch [1].

Es stellt sich die Frage, welche der obigen Zusammenhänge weiterhin gelten. Die drei „Apollonius-Kreise" haben die kollinearen Mitten

$$M_a(0:\gamma^2:-\beta^2), \quad M_b(-\gamma^2:0:\alpha^2), \quad M_c(\beta^2:-\alpha^2:0)$$

mit den Radien

$$r_a = \frac{\alpha\beta\gamma}{|\beta^2-\gamma^2|} \ , \qquad r_b = \frac{\alpha b\gamma}{|\gamma^2-\alpha^2|} \ , \qquad r_c = \frac{\alpha\beta c}{|\alpha^2-\beta^2|} \ .$$



Die Mitten-Gerade erhält die Gleichung

$$\beta^2\gamma^2 x + \gamma^2\alpha^2 y + \alpha^2\beta^2 z = 0\,;$$

sie wird durch die Konjugation

$$X(x:y:z) \xrightarrow[\circ]{} X'(\alpha^2 yz : \beta^2 zx : \gamma^2 xy)$$

auf die Steiner-Um-Ellipse abgebildet. Ist die Mitten-Gerade Passante, Tangente bzw. Sekante des Umkreises, so ist das „Apollonius-Büschel“ elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch [1].
Wählt man wieder einen Umkreispunkt P (siehe oben) und spiegelt ihn an den „Apollonius-Kreisen“, so erhält man die Umkreispunkte

$$A_1(a^2\beta^2\gamma^2 : b^2\beta^2\gamma^2 - c^2\frac{w-u}{v-u}\beta^4 : c^2\beta^2\gamma^2 - b^2\frac{v-u}{w-u}\gamma^4),$$

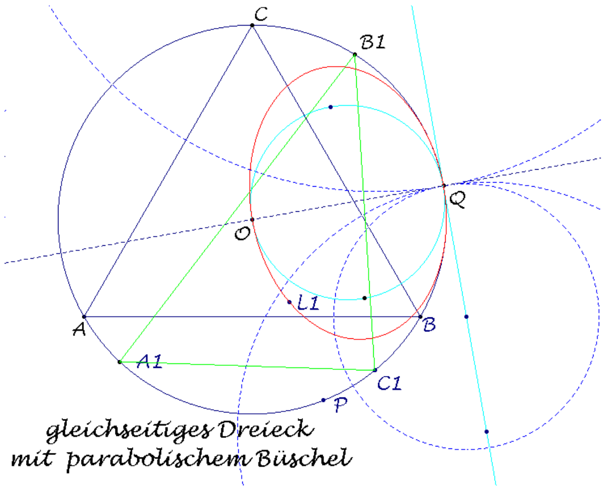
$$B_1(a^2\alpha^2\gamma^2 - c^2\frac{w-v}{u-v}\alpha^4 : b^2\alpha^2\gamma^2 : c^2\alpha^2\gamma^2 - a^2\frac{u-v}{w-v}\gamma^4),$$

$$C_1(a^2\alpha^2\beta^2 - b^2\frac{v-w}{u-w}\alpha^4 : b^2\alpha^2\beta^2 - a^2\frac{u-w}{v-w}\beta^4 : c^2\alpha^2\beta^2)$$

als Ecken eines Spiegeldreiecks. Dieses Spiegeldreieck liegt wieder perspektiv zum Bezugsdreieck; Perspektivzentrum ist

$$M = P^{*\wedge\circ}(\alpha^2(v-w), \beta^2(w-u), \gamma^2(u-v))$$

auf der Mitten-Gerade des „Apollonius-Büschels“. Damit sind die Aussagen von Satz 1 verallgemeinerungsfähig.
Dagegen lässt sich Satz 2 nicht verallgemeinern. Soviel sei mitgeteilt: Die Ortslinie der Lemoine-Punkte der Spiegeldreiecke ist eine Ellipse, ebenso die Einhüllenden der einzelnen Seitengeraden. Alle Ellipsen sind symmetrisch zur Achse des Büschels. Die Brennpunkte dieser Ellipsen liegen auf dem Thales-Kreis über der Umkreismitte und dem Pol der Mittengeraden bzgl. des Umkreises. Die isodynamischen Punkte der Spiegeldreiecke ergeben Kreise, symmetrisch zum Umkreis.



Ein abschließendes Beispiel: Das Bezugsdreieck sei gleichseitig und das Apollonius-Büschel parabolisch. Dann ist die Mitten-Gerade eine Tangente an den Umkreis; der Berührungspunkt sei Q. Die isodynamischen Punkte der Spiegeldreiecke liegen auf der Tangente in Q und ihrer Spiegelung am Umkreis, d.h. auf dem Thales-Kreis über dem zugehörigen Berührradius. Die Lemoine-Punkte der Spiegeldreiecke ergeben eine Ellipse mit den Nebenscheiteln in der Umkreismitte O und dem Berührpunkt Q. Die Brennpunkte liegen auf dem schon erwähnten Thales-Kreis über OQ.

Literatur

[1] R. Fritsch und M. Koman: Von Apollonios aus dynamisch Mathematik entdecken … - Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 25, München 2004.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de